Målteori

# -algebraer

**Definition**: En -algebra på en mængde er en brolægning der opfylder:

1. er ikke-tom.
2. er lukket under komplementdannelse:
3. er lukket under tællelig forening:

Kommentar: Bogstavet refererer her til tælleligheden i trin 3. En (mængde-)algebra er en brolægning opfylder 1 og 2, men kun 3 for endelige foreninger.

**Sætning**: Lad være en -algebra på . Da gælder der:

Bevis:

1. Da ikke er tom findes der et . De er lukket under komplementdannelse er . Da er lukket under tællelig (og dermed endelig) forening er .
2. Vi har lige vist . Da er lukket under komplementdannelse er
3. Antag . Da er lukket under komplementdannelse er . Da er lukket under tællelig (og dermed endelig) forening er .
4. Antag . Da er lukket under komplementdannelse er . Da er lukket under tællelig (og dermed endelig) forening er .
5. Antag . Da er lukket under komplementdannelse er . Da er lukket under tællelig forening er .

Bevis slut.

Bemærkning: Regel 1-4 gælder også for algebraer, mens 5 kun gælder for -algebraer. I beviset for 3 og 5 er De Morgans love benyttet.

## Eksempler

* For en vilkårlig mængde er trivielt en -algebra. Den størst mulige.
* Tilsvarende er også en -algebra. Den mindst mulige.
* Hvis er en -algebra.
* Hvis er en klassedeling af er en -algebra. Dette gælder, da: 1. , så er ikke tom. 2. Hvis findes der et så . Men så er . 3. Lad . Dvs. . Dermed er . Da ligger foreningen i .
* Mængden . I denne forbindelse regnes den tomme mængde som værende endelig. 1. Derfor er

**Sætning**: Lad være en ikke-tom familie af -agebraer på . Da gælder der:

er en -algebra på .

Bevis: Det skal bevises at de tre betingelser er opfyldt:

1. Da for alle er også medlem af fællesmængden, der dermed ikke er tom
2. Lad . Dvs. . Da alle ’erne er -algebraer må . Derfor må også .
3. Lad . Dvs. . Da alle ’erne er -algebraer må der gælde: , og dermed .

Bevis slut.

Sætningen kan benyttes til at bevis følgende:

**Sætning**: Lad være en mængde og en vilkårlig delmængde af potensmængden. Da eksisterer der en mindste -algebra genereret af - kaldet - i den forstand at den opfylder:

1. .
2. For enhver -algebra over , gælder der: .

Bevis: Betragt mængden:

Det ses, at mængden ikke er tom, da . Ifølge sætningen ovenfor er en -algebra. Denne mængde opfylder pr. konstruktion punkt 1 og 2 ovenfor. Bevis slut.

Sætningen motiverer følgende definition:

**Definition**: Lad Lad være en mængde og . Da kaldes som defineret ovenfor *den af frembragte -algebra*. kaldes for et frembringersystem for en -algebra , såfremt . Hvis har et tælleligt frembringersystem kaldes for *tælleligt frembragt*.

# Mål